CALCULO NUMÉRICO I

2° Lista: Solução de sistemas lineares – Métodos Exatos

1. Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

a. Resolva-o usando o método de eliminação de Gauss e determine as matrizes **L** e **U**.

b. Utilize as matrizes **L** e **U** obtidas no item *a* para resolver o sistema com o termo independente alterado para: $(3\ \ 4\ \ 3)^T$.

c. Resolva-o usando o método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial e determine as matrizes **L** e **U** e uma representação para as trocas de linhas.

2. Considere a seguinte matriz: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a. Enuncie as condições para que o método de Cholesky possa ser aplicado e verifique se as condições para matriz dada são satisfeitas.

b. Resolva, pelo método de Cholesky, o sistema $\boldsymbol{Ax=b}$, com $\boldsymbol{b^T}$=(0 1 2).

3. Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

a. Resolva o sistema pelo método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial e escreva as matrizes: **L**, **U** e a permutação.

b. Por que o pivotamento parcial é recomendado?

c. Considere a alteração: **b**=$(3,\ 3,\ 4)^T$. Use a decomposição obtida no item a) para resolver o novo sistema.

d. Se possível, resolva o sistema pelo método de Cholesky? Quando não seria possível resolver pelo método de Cholesky?

4. Resolva o sistema abaixo pelo método de eliminação de Gauss, utilizando

i. frações

ii. 2 algarismos significativos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Dê as matrizes **L** e **U** em cada caso.

a. Resolva o sistema, usando a decomposição **LU**, com a mudança **b**=$(3, 3, 4)^T$.

b. Suponha que o elemento $a_{33}=2$ da matriz do sistema seja alterado para $a_{33}+\delta$. Para que valor de δ o sistema não tem solução?

c. É possível resolver o sistema pelo método de Cholesky? Comente.

5. Considere o sistema: $\begin{cases} 6x_1 \quad -x_3 \quad = 5 \\ \quad 4x_2 - x_3 \quad = -1 \\ \quad\quad -4x_3 + x_4 = -4 \\ -x_1 \quad\quad 4x_4 = -1 \end{cases}$

Resolva o sistema acima pelo método de eliminação de Gauss e explicite as matrizes **L** e **U**. Comente sobre a esparsidade da matriz original e das matrizes **L** e **U**.

6. Considere a matriz **A=**$\begin{pmatrix} 4 & \alpha & 1 \\ \beta & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Determine valores de α e β para que a matriz **A** seja decomponível em $\mathbf{GG^t}$.

Para os itens a seguir, escolha $\alpha=\beta=0$

b. Decomponha a matriz **A** em $\mathbf{GG^t}$ e resolva o sistema **Ax=b**, em que $\mathbf{b^t=(-4\ \ 4\ \ 0)}$.

c. Aplique o método de eliminação de Gauss no sistema do item *b* e obtenha a solução e as matrizes **L** e **U** tal que: **A=LU**.

d. Use as matrizes **L** e **U** obtidas no item *c*, para resolver o sistema **Ax=b**, em que $\mathbf{b^t=(2\ \ 2\ \ 1)}$.

7. Considere a matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a. Mostre que a matriz $\mathbf{A^TA}$ é simétrica definida positiva. Enuncie a propriedade usada.

b. Resolva o sistema: $(\mathbf{A^TA})\mathbf{x} = \mathbf{A^Tb}$, em que $\mathbf{b}^T$=(1 2 3), pelo método de Cholesky.

c. O que se pode afirmar dos autovalores de $\mathbf{A^TA}$?

d. Mostre que se $\lambda<0$ é um autovalor de uma matriz **B**, então então **B** não pode ser definida positiva.

8. Considere o sistema: $\begin{cases} 6x_1 + x_2 \quad = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ \quad -x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

a. Resolva o sistema pelo método de eliminação de Gauss e determine a decomposição **A=LU.**

b. Considere que $a_{33} = \alpha$. Determine valores para α de modo que o sistema tenha solução única, ou infinitas soluções.

c. Se possível, resolva o sistema acima pelo método de Cholesky.

9. Considere o sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = -3 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 = 4 \\ x_1 x_2 x_3 = 2 \end{cases}$$

a. Verifique que $\mathbf{x} = (1\ 2\ 1)^T$ é uma solução do sistema.

b. Com a aproximação inicial $\mathbf{x^0}=(1\ 1\ 1)^T$ resolva o sistema usando o método de Newton.

- Use o método de eliminação de Gauss para resolver os sistemas lineares de cada iteração.
- O método de Cholesky pode ser usado para resolver os sistemas lineares de cada iteração? Por que?
- Você usaria o método iterativo de Gauss-Seidel para resolver os sistemas lineares de cada iteração? Por que?
- Na sua opinião, a seqüência deve convergir? Por que?

c. O ponto $\mathbf{x^0}=(0\ 0\ 0)^T$ pode ser utilizado? Por que?

10. Considere o pseudocódigo abaixo para a eliminação de Gauss:

```
Para k=1,…,m-1, faça:
 (início do passo k)
      Para i=k+1,…,m,  faça:
          mult =  a_ik / a_kk
          Para j=k+1,…,m, faça:   a_ij = a_ij - mult * a_kj
          b(i) = b(i) – mult * b(k)
   (fim do passo k)
```

a. A implementação do pseudocódigo apresentaria problema caso o pivô fosse nulo. Aponte onde isto aconteceria? Introduza no pseudocódigo um teste simples para verificar se o pivô é nulo (use uma tolerância), interrompendo caso ocorra.

b. Inclua o cálculo da solução do sistema triangular: $x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}\, x_j \right) \Big/ a_{ii}$.