

Introdução a Pesquisa Operacional – 2010
Lista de Exercícios
Resolução Gráfica e Modelagem Matemática

1) Um jovem atleta sente-se atraído pela prática de dois esportes: natação e ciclismo. Sabe, por experiência, que:

- A natação exige um gasto em mensalidade do clube e deslocamento até a piscina que pode ser expresso em um custo médio de R\$ 3,00 (três reais) por seção de treinamento de duas horas;
- O ciclismo, mais simples, acaba custando cerca de R\$ 2,00 (dois reais) pelo mesmo tempo de prática;
- O orçamento do jovem permite dispor de R\$ 70,00 para treinamento;
- Seus afazeres da universidade lhe dão liberdade de despende, no máximo, 18 horas e 80000 calorias por semana para os esforços físicos;
- Cada seção de natação consome 1500 calorias, enquanto cada etapa ciclística despende 1000 calorias;
- Considerando que o rapaz goste igualmente de ambos os esportes o problema consiste em planejar seu treinamento de forma a maximizar o número de seções de treinamento.

a. Como o jovem deve planejar a sua vida de modo a obter o número máximo de seções? Formule o problema como um problema de otimização linear.

b. Resolva o problema graficamente.

2) Desenhe a região de solução do problema, vetor de custos e indique a(s) solução(ões) do problema, se ela(s) existir(em).

a. $Max 3x_1 + x_2$

$$S.a : -x_1 + x_2 \leq -1$$

$$-3x_1 - x_2 \leq -1$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 1$$

$$2x_2 \leq -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

b. $Max 2x_1 + x_2$

$$S.a : -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

c. $Max 2x_1 + 3x_2$

$$S.a : x_1 + x_2 \leq 2$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

d. $Min x_1 + 2x_2$

$$S.a : x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$4x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3) Pinocchio SA é uma empresa que produz dois tipos de brinquedos de madeira: bonecos e trens. Um boneco é vendido por R\$ 27, gasta R\$ 10 de matéria-prima e R\$ 13 de mão-de-obra. Um trem é vendido por R\$ 21, gasta 9 de matéria-prima e R\$ 10 de mão-de-obra. A manufatura dos dois brinquedos requer duas operações: carpintaria e acabamento. Um boneco requer 2 horas de acabamento e 1 hora de carpintaria. O trem requer 1 hora de acabamento e 1 hora de carpintaria. A cada semana, Pinocchio SA pode obter toda a matéria-prima necessária para as suas necessidades. Entretanto, apenas 100 horas de acabamento e 80 horas de carpintaria podem ser utilizadas para a confecção dos brinquedos. A demanda por trens é ilimitada, isto é, todos os trens produzidos têm condição de serem vendidos. Todavia, sabe-se, por experiência de mercado, que, no máximo, 40 bonecos são vendidos por semana.

a. Formule um modelo matemático para esta situação e que possa ser utilizado para maximizar o lucro líquido de Pinocchio SA.

b. Encontre a(s) solução(ões) ótima(s) graficamente, se houver. Quantas soluções ótimas o problema possui?

c. Suponha que não se saiba o lucro por tipo de brinquedo vendido, mas os custos de produção dos dois brinquedos sejam dados: R\$ 5 por unidade de boneco produzido e R\$ 3 por unidade de trem produzido. Formule um modelo matemático para esta situação e que possa ser utilizado para minimizar o custo operacional de produção dos brinquedos. Resolva-o graficamente e compare com a solução obtida no item b.

4) Um pequeno produtor tem 10 unidades de terra e planeja cultivar trigo e milho para vender ao mercado interno. A produção esperada é de 20 kg por unidade de área plantada de trigo e 30 kg por unidade de área plantada de milho. Para atender ao consumo interno de sua fazenda, ele deve plantar, pelo menos, 1 unidade de área de trigo e 3 unidades de área de milho. Os silos da fazenda têm condição de armazenar 120 kg de produtos. O trigo fornece um R\$ 1,20 por kg e o milho, R\$ 0,28 por kg.

a. Formule o problema como um problema de otimização linear.

b. Resolva-o graficamente.

c. O produtor tem condição de vender alguma cultura ao mercado interno? Qual e em que quantidade?

d. Qual a restrição poderia ser retirada do problema sem que o valor da solução ótima fosse alterado?

e. Suponha que o mercado esteja em falta de milho e, portanto, o produtor tenha um lucro de R\$ 1,00 por kg de milho. Mostre, graficamente, se a solução ótima muda.

5) Em um dado processo químico, podem ser produzidos (simultaneamente ou não, dependendo de certas substâncias adicionais) dois produtos (A e B) os quais são vendidos para outra indústria e utilizados na produção de um terceiro produto. Especificamente, 1 litro do produto A produz 1 litro do terceiro produto e 1 litro de B produz 2,5 litros do terceiro produto. Há uma restrição de demanda que diz que A e B devem ser produzidos numa quantidade suficiente para produzir 5 litros do terceiro produto a cada hora durante a jornada de trabalho da indústria. Durante o processo químico, sabe-se que o produto B

consome oxigênio, enquanto o produto A produz oxigênio. Cada litro produzido do produto B consome 2 litros de oxigênio por hora e cada litro de produzido do produto A produz 1 litro de oxigênio por hora. Para estender a vida útil do catalisador, a quantidade de oxigênio no reator não pode exceder 2 litros por hora (se necessário, pode-se adicionar oxigênio extra sem custos relevantes). Cada litro de produto A é vendido por R\$ 25 e cada litro de produto B, R\$ 55. A indústria deseja maximizar o lucro decorrente da venda dos dois produtos.

- a. Formule o problema como um problema de programação linear.
- b. Resolva-o graficamente, indicando a solução ótima do problema (vértice ótimo) e o valor da função objetivo.
- c. Resolva o problema, graficamente, supondo que os valores R\$ 25 e R\$ 55 sejam os custos de produção de cada litro dos produtos A e B, respectivamente e o objetivo seja minimizar o custo total.

Atenção: Para cada exercício a seguir, escreva o modelo matemático e se possível, o resolva utilizando o solver do excel.

6) Duas equipes de fabricantes de carros de corrida estão praticamente disputando sozinhas o campeonato. A cada mês são disputadas três provas. A equipe vencedora é aquela que acumula o maior número de vitórias durante todas as corridas do ano. Assim que o campeonato se iniciou, a Equipe B passou a vencer a Equipe A em cerca de 60% das provas. O carro da Equipe B acabava sempre ultrapassando nas curvas o carro da Equipe A. Tentando anular essa vantagem, os engenheiros da Equipe A desenvolveram um aerofólio especial para dar mais estabilidade ao carro nas curvas. Apesar de ficar com o carro mais pesado, o piloto da Equipe A podia, agora, usar sua habilidade e impedir a ultrapassagem do carro da Equipe B nas curvas, mantendo ou ganhando sua posição nas retas. Com a melhoria tecnológica, a Equipe A passou a vencer cerca de 80% das corridas. Vendo o desastre se aproximar, os engenheiros da Equipe B contra-atacaram criando um estabilizador de suspensão para melhorar a manobrabilidade nas curvas. O resultado anulou a habilidade do piloto da Equipe A em bloquear o carro da Equipe B nas curvas e essa passou a vencer cerca de 80% das provas. Acuada e sem ter como aumentar mais a aderência do carro nas curvas, a Equipe A, em uma reunião de emergência, tentou uma estratégia suicida: retirar o aerofólio para ganhar o alívio de peso e tentar compensar nas retas o que fatalmente perderia nas curvas. Surpreendentemente, com essa estratégia passou a ganhar 80% das provas, pois o estabilizador de suspensão especial dos carros da Equipe B era muito pesado e inútil nas retas, reduzindo sobremaneira o desempenho do carro fora das curvas. Imediatamente, a Equipe B retirou seu equipamento e as escuderias voltaram ao ponto de partida com vantagem novamente para a Equipe B. A essa altura do campeonato, as duas equipes estavam rigorosamente empatadas em número de vitória. O chefe da Equipe A resolveu contratar um assessor de Pesquisa Operacional para decidir a melhor política para sua equipe e, quem sabe, dar-lhe o título daquele conturbado ano. Formule e solucione o problema de encontrar a política ótima de equipagem para o carro da Equipe A. Sabe-se que a instalação do estabilizador especial e do aerofólio leva cerca de 4 horas e não pode ser desfeita ao longo da corrida, e que os boxes de cada equipe podem ser fechados,

de forma que a equipe concorrente não saiba qual configuração será adotada em uma corrida pela adversária. Formule matematicamente e resolva graficamente o problema.

7) Três refinarias com capacidade de produção diária de gasolina de 25000, 15000 e 5000t, respectivamente, abastecem três grandes centros distribuidores, cujas necessidades são, respectivamente, 15000, 10000 e 20000 t. O abastecimento é feito através de uma rede de oleodutos com uma tarifa de \$200/t/km. Sabendo que as distâncias (em km) entre as refinarias e os centros distribuidores são apresentadas no quadro a seguir, formule um problema de programação linear para determinar a distribuição ótima.

	D1	D2	D3
R1	5	70	320
R2	75	15	220
R3	300	200	2

8) Uma fábrica necessita cortar uma fita de aço de 12cm de largura em tiras de 2,4cm, 3,4cm e 4,5cm de largura. As necessidades globais das tiras são:

Tipo de Tira	Largura (cm)	Comprimento Mínimo
Tira 1	2,4	2500m
Tira 2	3,4	4500m
Tira 3	4,5	8000m

10) Um fornecedor deve preparar, a partir de cinco tipos de bebidas de fruta disponíveis em estoque, 500 galões contendo pelo menos 20% de suco de laranja, 10% de suco de uva e 5% de suco de tangerina. Os dados referentes ao estoque são os mostrados a seguir. Formule um problema de programação matemática para determinar o quanto de cada uma das bebidas o fornecedor deve utilizar para obter a composição requerida a um custo total mínimo.

	Suco de laranja(%)	Suco de uva(%)	Suco de tangerina(%)	Estoque (galões)	Custo (\$/galão)
Bebida A	40	40	0	200	1,5
Bebida B	5	10	20	400	0,75
Bebida C	100	0	0	100	2
Bebida D	0	100	0	50	1,75
Bebida E	0	0	0	800	0,25

11) Uma reserva florestal está em chamas e o governo planeja uma operação fulminante de combate ao fogo para amanhã. O incêndio é de pequenas proporções e está se propagando lentamente, devendo ser extinto em cerca de três horas de operação logo após o amanhecer. Estão sendo mobilizados aviões e helicópteros especializados nesse tipo de operações. As características dos aparelhos constam na tabela a seguir.

Aparelho	Eficiência no Incêndio (m ² /hora)	Custo (R\$/hora)	Necessidade em Pessoal
Helicóptero AH-1	15.000	2.000	2 Pilotos
Avião Tanque	40.000	4.000	2 Pilotos – 1 Operador
Avião B67	85.000	10.000	2 Pilotos – 3 Operadores

A área de floresta a ser coberta pelo combate ao fogo é de 3.000.000 m², envolvendo a frente de fogo (para paralisação do avanço do dano), áreas já queimadas que necessitam de rescaldo (para proteção de animais e segurança contra recrudescimento) e áreas de acero (proteção preventiva indispensável). Nas bases de apoio são disponíveis 14 pilotos de avião e 10 de helicópteros, bem como 22 operadores especializados em combate aéreo de fogo. Formule o problema de programação matemática que minimize os custos da operação.