ICMC – USP
SME0818 – Inferência Estatística – 2022/1
Lista 2

1. Considere $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição em que $P(X_i = -1; \theta) = P(X_i = 1; \theta) = (1-\theta)/2$ e $P(X_i = 0; \theta) = \theta$, $i = 1, \ldots, n$, e $\Theta = (0, 1)$. Apresente uma estatística suficiente para θ.

2. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com função densidade $f(x; \theta) = \theta x^{-2} I_{[\theta,\infty)}(x)$, $\theta > 0$.

   (a) Represente graficamente esta função densidade.

   (b) Apresente uma estatística suficiente para θ.

   (c) Apresente o EMV de θ.

3. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com função densidade $f(x; \theta) = \theta(1 + x)^{-(1+\theta)} I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$.

   (a) Represente graficamente esta função densidade.

   (b) Apresente uma estatística suficiente para θ.

   (c) Apresente o EMV de θ.

4. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com uma das seguintes funções densidade:

   (a) $f(x; \theta) = \theta\, x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x), \;\; \theta > 0$.

   (b) Weibull:
   $f(x; \theta) = \theta a x^{a-1} \exp(-\theta x^a) I_{(0,\infty)}(x), \;\; \theta > 0, \;\; a > 0$.

   (c) Pareto:
   $f(x; \theta) = \theta a^\theta x^{\theta+1} I_{(a,\infty)}(x), \;\; \theta > 0, \;\; a > 0$.

   Prove que as três distribuições são da família exponencial (a conhecido) e apresente as estatísticas suficientes.

5. Qual(is) das seguintes distribuições pertence(m) à família exponencial?

   (a) $f(x; \theta) = \{\exp[-2 \log \theta + \log(2x)]\}\, I_{(0,\theta)}(x)$, $\theta > 0$.

   (b) $f(x; \theta) = \dfrac{1}{9} I_{\{1+\theta, 2+\theta, \ldots, 9+\theta\}}(x)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

   (c) $f(x; \theta) = 2\dfrac{x + \theta}{1 + 2\theta}\, I_{(0,1)}(x)$, $\theta > 0$.

   (d) Beta:
   $$f(x; \theta_1, \theta_2) = \frac{x^{\theta_1 - 1}(1 - x)^{\theta_2 - 1}}{B(\theta_1, \theta_2)}\, I_{(0,1)}(x),$$
   para $\theta_1 > 0$ e $\theta_2 > 0$, sendo que $B(\theta_1, \theta_2) = \int_0^1 u^{\theta_1 - 1}(1 - u)^{\theta_2 - 1} du$ é a função beta com argumentos θ_1 e θ_2.