PIPGEs ICMC – USP/UFSCar
EST5802 – Inferência Avançada – 2024/2
4ª lista de exercícios

Os exercícios 1–5 encontram-se no livro [1].

1. Exercício 6 (a, b), Cap. 3.

2. Exercício 29, Cap. 3.

3. Exercício 35 (a, b, c), Cap. 3.

4. Exercício 37 (a, b, c), Cap. 3.

5. Exercício 40 (a, b), Cap. 3.

6. Sejam $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, sendo que

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-m/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} I_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}),$$

   com $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz $m \times m$ simétrica definida positiva. Apresente estatísticas conjuntamente suficientes para $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$.

7. Sejam $X \sim \mathsf{normal}(\theta, 1)$ e $\delta_{a,b}(X) = aX + b$ um estimador de θ, com θ, a e $b \in \mathbb{R}$, a e b conhecidas.

   (a) Calcule o erro quadrático médio (EQM) de $\delta_{a,b}(X)$.

   (b) Represente graficamente o EQM de $\delta_{1/2,0}(X)$ e $\delta_{1,0}(X)$ em função de θ. Pode ser afirmado que um estimador é uniformemente melhor do que o outro em termos de EQM?

8. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$.

   (a) Procure interpretar $g(\theta) = \exp(-t_0\,\theta)$ em que $t_0 > 0$ é fixado.

   (b) Apresente o estimador não viesado de variância uniformemente mínima (ENVVUM) de $g(\theta)$.

9. Suponha que $\delta_1 = \delta_1(\boldsymbol{X})$ e $\delta_2 = \delta_2(\boldsymbol{X})$ são dois ENVVUM de $g(\boldsymbol{\theta})$ com variâncias finitas. Prove que $\delta_1 = \delta_2$.
   Sugestão. $\delta_3 = (\delta_1 + \delta_2)/2$ é um ENV de $g(\boldsymbol{\theta})$. Utilize a desigualdade da correlação.

Referência

[1] Shao, J. *Mathematical Statistics*, 2nd ed., New York: Springer, 2003.